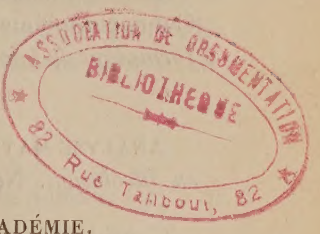
ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 12 SEPTEMBRE 1955.

PRÉSIDENCE DE M. ARMAND DE GRAMONT.



MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

L'Académie est informée de la réunion à Mexico, du 4 au 11 septembre 1956, de la XXe Session du **CONGRÈS GÉOLOGIQUE INTERNATIONAL**.

L'Ouvrage suivant est présenté par M. **ARNAUD DENJOY** : *Sur l'élection de Poncelet comme Membre-Correspondant de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, édité par M. T. P. KRAVETS.

DÉSIGNATIONS.

M. **GASTON DUPOUY** est adjoint à la délégation précédemment chargée de représenter l'Académie aux fêtes du Centenaire de l'**ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE ZURICH**, qui auront lieu du 17 au 22 octobre 1955.

CORRESPONDANCE.

M. le **SECRÉTAIRE PERPÉTUEL** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° Annales de l'Institut océanographique de Monaco. ÉDOUARD FISCHER-PIETTE. *Répartition, le long des côtes septentrionales de l'Espagne des principales espèces peuplant les rochers intercotidaux.*

2° Ministère de la France d'Outre-Mer. Commission scientifique du Logone et du Tchad. *Étude pédologique du Bassin alluvionnaire du Logone-Chari* (Campagne 1953-1954), par J. PIAS, sous la direction de G. AUBERT.

3° Il signale également plusieurs fascicules polycopiés : Séminaire de

Théories physiques, dirigé par Louis de Broglie, 24[e] année, 1954-1955; Séminaire Sophus Lie, 1[re] année, 1954-1955 : *Théorie des algèbres de Lie. Topologie des groupes de Lie;* Séminaire Schwartz, 2[e] année, 1954-1955 : *Équations aux dérivées partielles;* Séminaire Henri Cartan, 7[e] année, 1954-1955 : *Algèbre d'Eilenberg-Mac Lane et Homotopie. Méthodes mathématiques de la physique.* Cours complémentaire (mars-avril-mai 1952). *Compléments divers sur la transformation de Laplace et les équations aux dérivées partielles,* par Maurice Janet.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les systèmes de polynomes orthogonaux en involution.* Note (*) de M. **Kurt Endl**, présentée par M. Joseph Pérès.

Considérons un système quelconque de polynomes orthogonaux sous forme *orthonormée* :

$$\{ P_n(z) \} = \left\{ \sum_{r=0}^{n} p_r^{(n)} z^r \right\}$$

A chaque tel système appartient une matrice infinie $(\mathfrak{P}) = (p_r^{(n)})$. Envisageons, de même, le développement de z^n par rapport à ces polynomes $P_r(z)$:

$$z^n = \sum_{r=0}^{n} q_r^{(n)} P_r(z)$$

qui nous fournit une nouvelle matrice $(q_r^{(n)})$ que nous désignerons par $(\mathfrak{P}^{-1})$ (puisqu'on a $(p_r^{(n)})(q_r^{(n)}) = (q_r^{(n)})(p_r^{(n)}) = \delta_{r,n} = (1)$ [(1) matrice d'unité].

Le problème que s'est posé l'auteur est le suivant : Pour quels systèmes $\{P_n(z)\}$ peut-on trouver des coefficients $c_n \neq 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ tels que l'on ait

$$P_n^*(z) = c_n P_n(z) = \sum_{r=0}^{n} c_r p_r^{(n)} z^r = \sum_{r=0}^{n} p_r^{*(n)} z^r$$

et

$$z^n = \sum_{r=0}^{n} p_r^{*(n)} P_r^*(z),$$

c'est-à-dire tels que les développements de $P_n^*(z)$ suivant les puissances z^r, et de z^n suivant les polynomes $P_r^*(z)$ possèdent les mêmes coefficients, ou encore en langage de matrices : pour quels systèmes $P_n(z)$ peut-on normer les polynomes $P_n(z)$ de telle manière que, entre les nouvelles matrices correspondantes, on ait les égalités :

$$(1) \qquad (\mathfrak{P}^*) = (\mathfrak{P}^*)^{-1} \quad \text{ou} \quad (\mathfrak{P}^*)^2 = (1)$$

Nous dirons, pour utiliser la terminologie de la géométrie, qu'une matrice

(*) Séance du 5 septembre 1955.

($\mathfrak{L}^\star$) satisfait à (1) est une matrice *involutive*, et que les polynomes $P_n^\star(z)$ correspondant à une matrice involutive forment un système *involutif* de polynomes orthogonaux. Comme on s'en assure aussitôt, il ne s'agit pas ici d'une propriété générale des systèmes de polynomes orthogonaux. Le fait qu'on puisse déterminer, pour un système orthonormé *donné*, des coefficients c_n qui le rendent involutif, représente une propriété particulière du système. La condition nécessaire et suffisante pour que les coefficients c_n rendent le système $\{P_n(z)\}$ involutif s'exprime de la manière suivante :

$$(2) \qquad c_n c_r p_r^{(n)} = (z^n, P_r) \ (^1) \qquad (0 \leq r \leq n, \ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

On trouve tout de suite que c_n doit être, au signe près, le nombre $1/p_n^{(n)}$. Si nous posons $c_n = \varepsilon_n/p_n^{(n)}$ (où $\varepsilon_n = \pm 1$), (2) s'écrit

$$(3) \qquad \varepsilon_n \varepsilon_r p_r^{(n)} = (z^n, P_r(z))\, p_n^{(n)} p_r^{(r)} \qquad (0 \leq r \leq n).$$

On vérifie que la relation (3) est satisfaite par les polynomes orthonormés de Laguerre

$$L_n^{(\alpha)}(z) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}}} \sum_{r=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-r} (-1)^r \frac{z^r}{r!}$$

avec les coefficients

$$c_n = n! \sqrt{\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}},$$

on a alors

$$p_r^{\star(n)} = \binom{n+\alpha}{n-r} \frac{(-1)^r}{r!} n!.$$

Enfin, (3) est encore satisfaite par les polynomes orthonormés d'Hermite

$$H_n(z) = (2^n n!)^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{4}} \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^r \binom{n}{2r} \frac{(2r)!}{r!} (2z)^{n-2r}$$

avec les coefficients $(-1)^{[n/2]} 2^{(n/2)-n} \sqrt{n!}\, \pi^{1/4}$. On obtient pour le système des polynomes H_n rendus involutifs

$$H_n^\star(z) = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} p_r^{\star(n)} z^{n-2r} \qquad \text{et} \qquad z^n = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} p_r^{\star(n)} H_{n-2r}^\star,$$

avec

$$p_r^{\star(n)} = \frac{(-1)^r}{4^r} \binom{n}{2r} \frac{(2r)!}{r!}.$$

---

(1) (P(z), Q(z)) désigne le produit scalaire habituel.

On vérifie facilement que la condition nécessaire (3) ne peut être satisfaite, par aucun choix des coefficients c_n, pour les autres systèmes orthogonaux usuels, par exemple ceux de Gegenbauer, de Jacobi, de Legendre et de Tchebychef.

Ainsi, le fait pour un système de polynomes orthogonaux de pouvoir être rendu involutif est une propriété spécifique qui n'affecte, dans les cas usuels, que les systèmes de polynomes de Laguerre et de Hermite.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Transformées de Fourier de distributions invariantes*. II. Note de M. **Pierre-Denis Methée**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

On complète la Note précédente sur le même sujet en donnant le détail des résultats obtenus pour $\mathcal{F}$H et $\mathcal{F}$S [1].

Notations. — Γ est la fonction d'Euler, ψ sa dérivée logarithmique, $2\psi_1$ la fonction $\pi^2/_3 + \psi^2 - \psi'$. On pose

$$\alpha_1(n) = \pi^{\frac{n}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right), \qquad \alpha_2(n) = (4\pi)^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right), \qquad \beta_1(n) = \log 4 + \psi(1) + \psi\left(\frac{n}{2}\right),$$

$$\alpha_3(n, k) = 4^{k+1}\pi^{\frac{n+2}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2} - 1 - k\right), \qquad \lambda(n, p) = 2^{n+p}\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right),$$

$$\beta_2(n) = -2\log^2 2 + 2\log 2\beta_1(n) + \psi(1)\psi\left(\frac{n}{2}\right) + \psi'(1) + \psi\left(\frac{n}{2}\right),$$

pour p complexe quelconque, k entier $\geqq 0$. Les distributions, définies dans R^n, égales à $|u|^{p/2}\log^k|u|$ dans Ω_1, Ω_3, Ω_2 respectivement et à 0, ailleurs sont notées $M^{p,k}$, $\overline{M}^{p,k}$, $\mathfrak{M}^{p,k}$. On a $S^p = M^{p,0}$, $\overline{S}^p = \overline{M}^{p,0}$, $\mathcal{S}^p = \mathfrak{M}^{p,0}$ et on écrira L^k, $\overline{L}^k$, $\mathcal{L}^k$ pour $M^{0,k}$, $\overline{M}^{0,k}$, $\mathfrak{M}^{0,k}$.

On pose encore $M_+ = M + \overline{M}$, $M_- = M - \overline{M}$, $H_+ = H + \overline{H}$, $H_- = H - \overline{H}$.

On désigne par ($\mathcal{F}R_1$), ($\mathcal{F}R_2$) les transformées de Fourier des relations (R_1) entre $\square H^k$ et H^{k+1}, (R_2) entre $\square S^p$ et S^{p-2}, $\square \mathcal{S}^p$ et $\mathcal{S}^{p-2}$ ([3], p. 251, 255 et 256).

Les $\mathcal{F}$H *pour* $k \in$ N. (Pour $k \notin$ N, *voir* [1]) :

$$\mathcal{F}H_+^{\frac{n-2}{2}} = -\pi^{\frac{n-2}{2}}[L_+ + \mathcal{L} - 2\psi(1) - \log 4], \qquad \mathcal{F}H_-^{\frac{n-2}{2}} = -i\pi^{\frac{n}{2}}S_-^0.$$

On passe aux $\mathcal{F}$H d'indices $(n - 2/2) + k$ par ($\mathcal{F}R_1$).

---

(1) *Comptes rendus*, **240**, 1955, p. 1179 (référence notée [1]). *Cf.* aussi [2] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, 1 et 2 (Hermann, 1950 et 1951) et [3] P.-D. Methée (thèse), *Comm. Math. Helv.*, **28**, 1954, p. 225-269.

Les $\mathcal{F}$S *pour* $p \notin$ E. — 1. $-n-p \notin$ E [2] :

$$\mathcal{F}\mathrm{S}_+^p = \lambda(n, p)\left[\cos(n+p)\frac{\pi}{2}\,\mathrm{S}_+^{-n-p} + s^{-n-p}\right],$$

$$\mathcal{F}s^p = -\lambda(n, p)\left[\cos n\frac{\pi}{2}\,\mathrm{S}_+^{-n-p} + \cos p\frac{\pi}{2}\,s^{-n-p}\right],$$

$$\mathcal{F}\mathrm{S}_-^p = -i\lambda(n, p)\sin(n+p)\frac{\pi}{2}\,\mathrm{S}_-^{-n-p}.$$

2. $p = 2k$, *avec n impair.* $\mathcal{F}s^{2k}$ et $\mathcal{F}\mathrm{S}_-^{2k}$ comme sous 1, et

$$\mathcal{F}\mathrm{S}_+^{2k} = (-1)^{k+1}[\mathcal{F}s^{2k} - (2\pi)^n \square^k \delta].$$

3. $p = 2k$, *avec n pair :*

$$\mathcal{F}s^{2k} = -\lambda(n, 2k)\left[(-1)^{\frac{n}{2}}\mathrm{S}_+^{-n-2k} + (-1)^k s^{-n-2k}\right] + \frac{1}{2}(2\pi)^n \square^k \delta,$$

$$\mathcal{F}\mathrm{S}_+^{2k} = (-1)^{k+1}[\mathcal{F}s^{2k} - (2\pi)^n \square^k \delta], \qquad \mathcal{F}\mathrm{S}_-^{2k} = -i(4\pi)^{\frac{n}{2}} 4^k \Gamma(k+1)\,\mathrm{H}_-^{\frac{n-2}{2}+k}.$$

4. $p = 2 - n + 2k$, *avec n impair.* $\mathcal{F}\mathrm{S}_+^{2-n+2k}$ comme sous 1, et

$$\mathcal{F}s^{2-n+2k} = \alpha_3(n, k)\,\mathrm{H}_+^k, \qquad \mathcal{F}\mathrm{S}_-^{2-n+2k} = i(-1)^{\frac{n-1}{2}+k}\alpha_3(n, k)\,\mathrm{H}_-^k.$$

Les $\mathcal{F}$S *pour* $p \in$ E. — 1. $p = -2$, *avec n impair.*

$$\mathcal{F}s^{-2} = \alpha_2(n)[\beta_1(n-2)s^{2-n} - \mathfrak{M}^{2-n,1}],$$

$$\mathcal{F}\mathrm{S}_+^{-2} = \mathcal{F}s^{-2} + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi\alpha_2(n)\mathrm{S}_+^{2-n},$$

$$\mathcal{F}\mathrm{S}_-^{-2} = i(-1)^{\frac{n-1}{2}}\alpha_2(n)[\beta_1(n-2)\mathrm{S}_-^{2-n} - \mathrm{M}_-^{2-n,1}].$$

2. $p = -2$, *avec n pair.*

$$\mathcal{F}\mathrm{S}_+^{-2} = -\frac{\pi}{8}(4\pi)^{\frac{n}{2}}\mathrm{H}_+^{\frac{n-4}{2}} + \alpha_2(n)\left[\beta_1(n-2)\left((-1)^{\frac{n-2}{2}}\mathrm{S}_+^{2-n} + s^{2-n}\right) - \left((-1)^{\frac{n-2}{2}}\mathrm{M}_+^{2-n,1} + \mathfrak{M}^{2-n,1}\right)\right],$$

$$\mathcal{F}s^{-2} = \mathcal{F}\mathrm{S}_+^{-2} + \frac{\pi}{4}(4\pi)^{\frac{n}{2}}\mathrm{H}_+^{\frac{n-4}{2}},$$

$$\mathcal{F}\mathrm{S}_-^{-2} = i\pi\left[(-1)^{\frac{n}{2}}\alpha_2(n)\mathrm{S}_-^{2-n} - (4\pi)^{\frac{n-2}{2}}\beta_1(n-2)\mathrm{H}_-^{\frac{n-4}{2}}\right].$$

3. $p = -n$, *avec n impair.*

$$\mathcal{F}\mathrm{S}_+^{-n} = (-1)^{\frac{n+1}{2}}\alpha_1(n)[\mathrm{L}_+ + \mathcal{L} - \beta_1(n)], \qquad \mathcal{F}s^{-n} = -\pi\alpha_1(n)s^0,$$

$$\mathcal{F}\mathrm{S}_-^{-n} = i(-1)^{\frac{n+1}{2}}\pi\alpha_1(n)\mathrm{S}_-^0.$$

---

(2) Sous une autre forme, ce sont les formules (VII.7, 38) de [2], t. 2, p. 120.

4. *$p = -n$, avec n pair.*

$$\mathcal{F}S_{+}^{-n} = \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}\alpha_1(n)}{2\pi}\left[(L_{+}^{2} + \mathcal{L}^{2}) - 2\beta_1(n)(L_{+} + \mathcal{L}) + 2\beta_2(n) - \pi^2 S_{+}^{0}\right],$$

$$\mathcal{F}s^{-n} = (-1)^{\frac{n-2}{2}}\mathcal{F}S_{+}^{-n} + \frac{\pi}{2}\alpha_1(n)(S_{+}^{0} - s^{0}),$$

$$\mathcal{F}S_{-}^{-n} = i(-1)^{\frac{n-2}{2}}\alpha_1(n)\left[L_{-} - \beta_1(n)S_{-}^{0}\right].$$

On passe aux $\mathcal{F}S$ d'indices $-2-2k$ ou $-n-2k$ par $(\mathcal{F}R_2)$.

GÉOMÉTRIE DES NOMBRES. — *Propriétés arithmogéométriques des polygones.* Note de M. **Eugène Ehrhart**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Suite des quatre Notes du même auteur parues depuis le début de 1955.

Ceci est la suite de quatre Notes sur la géométrie des nombres [1].

Définitions. — Une région du plan d'un réseau est dite *vide*, si elle ne renferme pas de point entier. Un *polygone* est *entier*, si ses sommets sont des points entiers; il est *absolument entier*, si ce sont les seuls de son contour.

Les polygones que nous envisagerons peuvent être concaves, mais non croisés [2].

Théorème 1. — *L'aire S d'un polygone entier est liée aux nombres i et p de ses points entiers intérieurs et périphériques par la relation*

(1) $$i + \frac{p}{2} = S + 1 \quad [3]$$

Il suffit de le démontrer pour un réseau à base carrée, puisqu'une transformation linéaire conserve i, p et S.

1° *Cas d'un parallélogramme entier* ABCD. — Soit n le nombre des intervalles de longueur d déterminés sur AB par ses points entiers, n' le nombre des intervalles de CD. On a vu (Note 3, démonstration du théorème 4) que les

---

[1] Note 1 (*Comptes rendus*, **240**, 1955, p. 483), Note 2 (*Comptes rendus*, **240**, 1955, p. 583), Note 3 (*Comptes rendus*, **240**, 1955, p. 935), Note 4 (*Comptes rendus*, **241**, 1955, p. 274).

[2] *Pour les polygones croisés il existe des formules analogues, mais elles exigent des conventions algébriques.* Ainsi pour un quadrilatère entier, croisé en un point non entier, $S = i + (p/2)$, si pour le triangle dont le contour est parcouru en sens négatif, on compte négativement l'aire et les nombres de points intérieurs et périphériques.

[3] Pour les polyèdres entiers la question se complique. Ainsi pour un parallélépipède entier de mêmes directions principales qu'un réseau, le volume V et les nombres i, f, a des points entiers intérieurs, dans les faces et sur les arêtes satisfont $i + (f/2) + (a/4) = V + 1$; mais cette formule est déjà en défaut pour le prisme détaché par une section diagonale.

points entiers du réseau sont sur des parallèles à AB à des distances K/d (k entier arbitraire), sur lesquelles deux points entiers consécutifs ont pour distance d. Si la distance de cD à AB est $n'(m/d)$, on voit que

$$i = n'mn - n - n' + 1, \qquad p = 2(n + n'), \qquad S = nd\,n'\frac{m}{d} = n'mn.$$

2° *Cas d'un triangle* ABC. — Si q est le nombre de points entiers de AC, A et C exclus, les caractéristiques i', p', S' du triangle sont liées à celles du parallélogramme ABCD par

$$i' = \frac{i - q}{2}, \qquad p' = \frac{p}{2} + 1 + q, \qquad S' = \frac{S}{2}.$$

Remarquons que *pour un triangle absolument entier l'aire est égale au nombre des points entiers intérieurs plus* $1/2$ (car $p/2 = 1,5$).

3° *Cas d'un polygone entier quelconque.* — Tout polygone entier peut être considéré comme une chaîne de triangles entiers, tels que deux triangles consécutifs aient un côté commun. Il suffit donc de montrer que si la formule est exacte pour un polygone P, elle l'est aussi pour le polygone P′ obtenu en lui accolant vers l'extérieur, le long d'un côté AB, un triangle entier P″. Or si AB porte q points entiers autres que A et B, les caractéristiques des trois polygones sont liées par

$$i' = i + i'' + q, \qquad p' = p + p'' - 2q - 2, \qquad S' = S + S''.$$

Théorème 2. — *L'aire* S *comprise entre un polygone entier et* n *polygones entiers intérieurs est liée aux nombres* i *et* p *de ses points entiers intérieurs et sphériques par la relation*

$$i + \frac{p}{2} + n = S + 1 \qquad (2)$$

(on suppose que les n polygones sont extérieurs les uns des autres et ne se touchent pas).

Les caractéristiques i_k, p_k, S_k ($k = 0, 1, \ldots, n$) des polygones satisfont à (1) et

$$i = i_0 - \sum_1^n (i_k + p_k), \qquad p = p_0 + \sum_1^n p_k, \qquad S = S_0 - \sum_1^n S_k.$$

Mettons $n = 1$:

Théorème 3. — *L'aire d'un anneau polygonal entier s'obtient en ajoutant au nombre de ses points intérieurs la moitié du nombre de ses points périphériques.*

En particulier :

Théorème 4. — *L'aire d'un anneau polygonal entier vide est égal à la moitié du nombre de ses points entiers périphériques.*

THÉORÈME 5. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle absolument entier soit vide est qu'il soit d'aire* $1/2$.

Pour un tel triangle la formule (1) s'écrit $0+3/2=S+1$.

Réciproquement si $S=1/2$ pour un triangle absolument entier, $i+3/2=1/2+1$.

THÉORÈME 6. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère convexe absolument entier soit vide est qu'il soit un parallélogramme d'aire* 1.

Pour un parallélogramme absolument entier d'aire 1, la formule (1) donne $i+4/2=1+1$.

Réciproquement si un quadrilatère convexe absolument entier ABCD est vide, les triangles ABC et ADC sont absolument entiers et vides, donc d'aire $1/2$. B et D sont donc des points entiers de distance $1/AC$ à AC. Si D n'est pas le symétrique B′ de B par rapport au milieu de AC, $\overrightarrow{B'D}=k\overrightarrow{AC}$ (k entier non nul). Si $k=1$, ACDB′ est un parallélogramme et D est sur le prolongement de BC : ABCD dégénère en triangle. Si $k>1$ un angle $(\widehat{BCD})$ du quadrilatère serait rentrant. Mêmes conclusions si $k\leq -1$.

THÉORÈME 7. — *Un polynome convexe entier de plus de quatre côtés n'est jamais vide.*

Il suffit de le montrer pour un pentagone, formé d'un quadrilatère convexe et d'un triangle vides. Le quadrilatère est un trapèze tel que la bande limitée par les droites-supports des bases soit vide. Le triangle ABE ne peut être adjacent au trapèze le long d'un des côtés non parallèles, car le pentagone ne serait pas convexe ou dégénéré en trapèze. Il est donc adjacent le long d'une base vide AB. La deuxième base $CD=kAB$. Si $k=1$, la bande limitée par les supports de AD et BC est vide, et le pentagone convexe dégénère encore en trapèze. Si $k\geq 2$, DA et BC se coupent en un point F, dont la distance à AB est inférieure ou égale à celle de AB à CD. Il s'ensuit que le triangle ABE n'est pas intérieur à ABF : le pentagone ne peut être convexe.

THÉORÈME 8. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ovale d'aire* 4,5 *renferme comme seul point entier son centre de gravité* G *est qu'il soit un triangle, déduit d'un triangle vide absolument entier par une homothétie de rapport* 3, *centrée en un de ses sommets.*

On voit facilement que la condition est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. L'aire de l'ovale O étant 4,5, l'aire qu'en détache un diamètre principal est au moins $4,5(4/9)=2$ (Note 1, lemme 1), mais aussi au plus 2, sans quoi (si l'aire est prise du côté convenable) elle formerait avec son symétrique par rapport à G une aire *convexe* supérieure à 4, ce qui entraînerait l'existence dans O d'un autre point entier que G (théorème de Minkowski). Donc (notations du lemme 3, Note 1) chacun des diamètres principaux $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A''B''}$ détache de O (du côté indiqué) une aire 2, qui forme avec son symétrique par rapport à G un ovale d'aire 4, vide à son centre de symétrie

près. On sait qu'un tel ovale est un parallélogramme, dont le contour porte comme seuls points entiers ses sommets et les milieux des côtés. Si les trois diamètres principaux précédents n'étaient pas diagonales des parallélogrammes correspondants, on en conclurait que O est lui-même un tel parallélogramme, d'aire 4 et non 4,5. Donc AB sépare de O un triangle ABC, dont le contour porte comme seuls points entiers ses sommets et les milieux G, I, J des côtés A′B′ et A″B″ devant avoir également des points entiers pour extrémités, I et J sont de ces extrémités. On en conclut que O est le triangle déduit de CIJ par l'homothétie (C,3).

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Propriétés asymptotiques de la courbe du mouvement brownien à* N *dimensions*. Note (*) de M. **Paul Lévy**, présentée par M. Louis de Broglie.

La courbe Γ du mouvement brownien dans E_N est universelle, en ce sens que, parmi les arcs successifs parcourus pendant des temps égaux, on peut en trouver qui réalisent avec une précision arbitrairement grande n'importe quelle forme donnée. Si une courbe donnée C est rectifiable et de longueur 1, on peut aussi trouver des arcs de Γ partant d'un point donné et arbitrairement peu différents de C, à une homothétie près. Le rapport d'homothétie vérifie alors la loi du logarithme itéré. Ce théorème a de nombreuses applications.

1. Soient Γ la courbe lieu du point $X(t)$ de l'espace euclidien E_N dont les coordonnées sont N déterminations indépendantes de la fonction du mouvement brownien, Γ_t l'arc qui correspond au segment $[0, t]$ de l'axe des t, et $L_p(t)$ la longueur maxima d'une ligne polygonale à p côtés, inscrite dans Γ_t, et dont les sommets se succèdent dans le même ordre que sur cet arc.

Théorème 1. — *Quand t tend vers l ($l = 0$ ou ∞), la loi du logarithme itéré s'applique à $L_p(t)$, c'est-à-dire que*

$$\Pr\left\{ \limsup_{t \to l} \frac{L_p^2(t)}{2t \log|\log t|} = 1 \right\} = 1.$$

Il est remarquable que cette formule ne dépende ni de N ni de p, quoique la définition de $L_p(t)$ en dépende, et que $L_p(t)$ augmente indéfiniment avec p.

2. Soient C un arc fini d'une courbe continue, rectifiable ou non, et γ_t l'arc, homothétique de Γ_t, lieu du point $x_t(\tau) = X(\tau)/\lambda(t)$ quand τ décrit $[0, t]$. Nous supposons C et Γ_t, donc aussi γ_t, partant de l'origine, et le rapport d'homothétie $\lambda(t)$ positif et tel que les plus grandes cordes de C et de γ_t soient égales.

Théorème 2. — 1° *Il existe presque sûrement des suites de valeurs t_p de t, tendant vers l ($l = 0$ ou ∞) et telles que γ_{t_p} tende vers* C.

(*) Séance du 5 septembre 1955.

2° *Pour une telle suite, posons*

$$k = \limsup_{p \to \infty} \frac{\lambda(t_p)}{\sqrt{2 t_p \log|\log t_p|}}.$$

Si la courbe C est rectifiable et de longueur 1, *on a presque sûrement* $k \leq 1$, *et l'on peut presque sûrement choisir les* t_p *de manière à avoir à la fois* $\gamma_{t_p} \to C$ *et* $k = 1$.

Dans ces énoncés, on peut adopter la définition de M. Fréchet pour le voisinage de deux courbes. Mais ils restent vrais avec certaines définitions plus restrictives, obtenues en particularisant la loi du mouvement sur C.

3. Supposons $N = 2$. Soient respectivement $m_1(C)$ et $m_2(C)$ la mesure de la plus petite aire convexe contenant C et celle de l'ensemble des points intérieurs chacun à au moins une boucle fermée de C. Posons

$$S_i(t) = m_i(\Gamma_t) \qquad (i = 1, 2).$$

En appliquant le théorème 2 aux courbes de longueur 1 qui rendent respectivement $m_1(C)$ et $m_2(C)$ maxima, à savoir la demi-circonférence de rayon $1/\pi$ et la circonférence de rayon $1/2\pi$, on voit que

Théorème 3. — *On a*

$$\left.\begin{aligned} \Pr\left\{ \limsup_{t \to l} \frac{\pi S_1(t)}{t \log|\log t|} = 1 \right\} = 1 \\ \Pr\left\{ \limsup_{t \to l} \frac{2\pi S_2(t)}{t \log|\log t|} = 1 \right\} = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (l = 0 \text{ ou } \infty).$$

Si $N > 2$, la même méthode s'applique à l'étude du plus petit volume convexe $V(\Gamma_t)$ contenant Γ_t. Elle ramène ce problème à la recherche de la courbe C de longueur 1 qui rend $V(C)$ maximum; faute de la connaître, la meilleure borne supérieure asymptotique presque sûre de $V(\Gamma_t)$ n'est connue qu'à un facteur constant près.

4. Les théorèmes 1 à 3, dans le cas de la limite infinie, s'étendent dans les mêmes conditions que la loi classique du logarithme itéré à une classe étendue de processus additifs asymptotiquement isotropes et gaussiens. Le temps t peut être remplacé par une variable entière n, de sorte que cette extension comprend en particulier la promenade dans un réseau de rues au sens de Pólya; le théorème 3 s'applique alors en remplaçant t par n et $S(t)$ par $S(2n)$ [1].

Une extension différente s'obtient en remplaçant Γ_t par un arc de Γ, intérieur à un arc fini Γ_T, et décrit pendant un intervalle de temps de durée t et d'origine quelconque dans $[0, T - t]$. Les théorèmes 1 à 3 s'appliquent alors, pour la limite zéro ($t \downarrow 0$), en remplaçant $\log|\log t|$ par $|\log t|$.

---

[1] Dans ce cas, le problème bien plus difficile de la recherche d'une borne inférieure pour $S_2(n)$ a été abordé par J. M. Hammersley, qui a obtenu un premier résultat intéressant. Il avait obtenu aussi une borne supérieure moins précise que celle indiquée ici.

RELATIVITÉ. — *Sur le caractère statique d'un modèle d'univers stationnaire en théorie unitaire de Jordan-Thiry.* Note (*) de M. **Yves Thiry**, présentée par M. Joseph Pérès.

Un modèle d'univers pentadimensionnel, stationnaire et à comportement asymptotique euclidien, pour lequel les lignes de courant à quatre dimensions coïncident avec les lignes de temps et pour lequel la quatrième composante du potentiel-vecteur est nulle, conduit à la considération d'un espace-temps statique ([1]).

1. En théorie relativiste de la gravitation, tout modèle d'univers stationnaire, à comportement asymptotique euclidien, pour lequel les lignes de courant de la matière (schéma fluide parfait) coïncident avec les lignes de temps est partout statique au sens de Levi Civita [145].

Nous nous proposons d'indiquer l'aspect et la démonstration de la généralisation dans la théorie unitaire de Jordan-Thiry de cette proposition.

2. Considérons dans cette théorie un modèle d'univers [215] constitué par une variété riemanienne cylindrique V_5 qui soit stationnaire [216] et à comportement asymptotique euclidien [221]. Supposons de plus que les lignes de courant de l'espace-temps V_4 [218] coïncident avec les lignes de temps et que la quatrième composante du potentiel-vecteur soit nulle. Ces hypothèses quadridimensionnelles qui s'écrivent $u^u = 0 (u = 1, 2, 3)$, $\varphi_4 = 0$ se traduisent dans V_5 par $v^u = 0$, $\gamma_{04} = 0$.

Remarquons qu'avec ces hypothèses la matière peut être chargée; on a en effet $v_0 = \gamma_{00} v^0 = h$ en général différent de zéro.

3. Montrons d'abord que le tenseur d'espace H'_{AB} [219] de V_5 est alors identiquement nul.

Sur une section d'espace W'_4 $x^4 =$ const. de V_5, le vecteur $\vec{p}'$ défini par ses composantes

$$p'_A = \frac{\zeta^3}{2} \varphi'_B H'^B_A \qquad (A, B = 0, 1, 2, 3)$$

satisfait à la formule de divergence

$$\mathrm{div}' \vec{p}' = \frac{\zeta^3}{2} H'^2 - \zeta \varphi'_A R^A_4$$

qui se déduit des équations du champ $S_{\alpha\beta} = r v_\alpha v_\beta$ et d'une formule générale de divergence valable pour une section W_n d'une variété W_{n+1} [192].

La section d'espace W'_4 étant supposée complète et à comportement asymptotique euclidien, les distributions de matière chargée étant supposées à distance finie et occupant sur W'_4 des domaines E_u, on obtient, par intégration

(*) Séance du 5 septembre 1955.

([1]) Les définitions et les notations sont celles utilisées par Lichnerowicz dans *Théories relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme*, Masson, 1955; les nombres entre crochets renvoient aux pages de cet ouvrage.

sur un compact C_ρ[223] de W'_4, pour ρ suffisamment grand

$$\sum_u \iiiint_{F_u} \zeta \varphi'_A R^A_4 = \iiiint_{C_\rho} \frac{\zeta^3}{2} H'^2 \, d\tau' - \text{flux}_{\partial C_\rho} \vec{p}'.$$

Le flux de $\vec{p}'$ sur ∂C_ρ tend vers zéro lorsque ρ tend vers l'infini [223]; dans le système de coordonnées totalement adaptées [218] utilisé, on a alors :

$$v^u = 0 \qquad \text{d'où} \qquad R^u_4 = r v^u v_4 = 0$$
$$\gamma_{04} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \varphi'_0 = 0,$$

et l'on conclut que sur W'_4 $H'^2 \equiv 0$.

4. Dans les formules

$$x^{A'} = x^A$$
$$x^{4'} = x^4 - f(x^A)$$

d'un changement du système des sections d'espace (*cf* [110]), f, *a priori* fonction des x^A, sera indépendant de x^0 : on a en effet $\varphi'_B = \partial_B(x^4 + f(x^A))$ et $\varphi'_0 = 0$ donne $\partial_0 f = 0$.

Ainsi on pourra trouver localement, par un changement de variables n'affectant pas x^0 (2), un système de coordonnées totalement adaptées tel que le $d\sigma^2$ de V_5 prenne la forme orthogonalisée

$$d\sigma^2 = \zeta^2 (dx^4)^2 - \gamma_{AB} \, dx^A \, dx^B,$$

ζ et les γ_{AB} ne dépendant que des variables x^u ($u = 1, 2, 3$).

Sur l'espace-temps V_4, on a alors la métrique-quotient

$$ds^2 = \zeta^2 (dx^4)^2 - g_{uv} \, dx^u \, dx^v \qquad (u, v = 1, 2, 3)$$

(les g_{uv} ne dépendant ni de x^0 ni de x^4) ou, selon Mme Hennequin, la métrique conforme $\overline{ds}^2 = \xi \, ds^2$. Ces métriques sont statiques au sens de Levi-Civita [136].

5. Ce résultat, établi sous les hypothèses non surabondantes énoncées, peut être appelé à servir de base à la construction sous des hypothèses correctes d'un modèle d'univers de Schwarzschild généralisé en théorie de Jordan-Thiry.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Décomposition en fonction de variables dynamiques du tenseur d'énergie-impulsion des fluides relativistes dotés de moment cinétique interne.* Note de MM. **Francis Halbwachs**, **Georges Lochak** et **Jean-Pierre Vigier**, présentée par M. Louis de Broglie.

A l'aide de la méthode de Belinfante-Rosenfeld, on généralise au cas d'un fluide doté de tensions, la théorie des fluides à spin de Möller-Weysenhoff. On justifie l'introduction de tensions non symétriques.

---

(2) L'hypothèse $\gamma_{04} = 0$ s'avère donc essentielle dans la généralisation présentée et les hypothèses pentadimensionnelles $v^A = 0$ ne sauraient convenir.

Considérons un fluide relativiste continu doté d'une densité continue de moment cinétique interne (spin). Négligeons la gravitation et décrivons le fluide à l'aide de spineurs q attachés en chaque point à des axes galiléens.

Comme Belinfante [1] et Rosenfeld [2], déduisons l'évolution des spineurs, et donc du fluide, d'un principe de variation $\delta \int \mathcal{L}(q)\, d\omega = 0$

Posant $\partial_\lambda = \partial/\partial x^\lambda$, $q_\lambda = \partial_\lambda q$, $\rho =$ densité invariante d'univers, $u_\mu =$ vitesse unitaire ($u_\mu u^\mu = -1$), on obtient :

l'équation de champ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\lambda} = 0, \tag{1}$$

le courant

$$J_\mu = \rho u_\mu = i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\mu} q - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^*_\mu} q^*\right),$$

le tenseur d'énergie

$$T_{\mu\nu} = \mathrm{R}\,e\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\nu} q_\mu - \delta_{\mu\nu}\mathcal{L}\right\}.$$

De (1) on déduit la conservation du courant

$$\partial_\mu J^\mu = D_\tau \rho = 0 \qquad (D_\tau \text{ dérivation le long de la ligne de courant}) \tag{2}$$

et la conservation de l'impulsion-énergie

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \tag{3}$$

Généralisant la théorie habituelle des fluides relativistes [3], montrons que $T^{\mu\nu}$ (ici non symétrique) peut s'écrire $T^{\mu\nu} = g^\mu u^\nu + \Theta^{\mu\nu}$, où l'on a g^μ, densité d'impulsion non colinéaire à u^μ [4]; $\Theta^{\mu\nu}$, tenseur non symétrique des tensions avec $\Theta_{\mu\nu} u^\nu = 0$, ce qui entraîne $g_\mu = -T_{\mu\nu} u^\nu$.

Suivant la méthode de von Laue, intégrons $\partial_\nu T^{\mu\nu}$ dans un domaine limité par un hypertube de courant infiniment délié et deux hypercloisons d'espace infiniment voisines, orthogonales au courant, et appliquons le théorème de Gauss. Il vient

$$\iiiint \partial_\nu T^{\mu\nu}\, d\omega = 0 = \iiint_S T^{\mu\nu}\, d\sigma_\nu = \iiint_P g^\mu u^\nu\, d\sigma_\nu \quad \frac{d}{d\tau}\left[\iiint_{V_0} g^\mu u^\nu u_\nu\, dV_0\right] d\tau + \iiiint \partial_\nu \Theta^{\mu\nu}\, d\omega$$

---

(1) *Physica*, 1939, p. 887-897. Nous prenons ses notations. On sous-entend dans le calcul la sommation sur les composantes de q. Les calculs sont faits en absence de champ; on généraliserait aisément.

(2) *Mém. Acad. Roy. Belge*, fasc. **6**, 1940.

(3) LICHNEROWICZ, *Éléments de Calcul Tensoriel*, § **118**, Paris, 1951; VON LAUE, *La Relativité*, **1**, § **28**, Paris, 1924.

(4) MATHISSON, *Acta Phys. Pol.*, **6**, 1937, p. 163 et 218; WEYSSENHOFF, *ibid* **9**, 1947, p. 8; MÖLLER, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **10**.5, 1949; COSTA DE BEAUREGARD, *Thèse*, Paris, 1943.

(P, hyperparoi du tube; V_0 volume propre de la gouttelette fluide). On a

$$\iiint_P g^{\mu} u^{\nu}\, d\sigma_{\nu} = 0 \qquad \text{car} \qquad u^{\nu}\, d\sigma_{\nu} = 0 \quad \text{sur P.}$$

$$-\frac{d}{d\tau}\iiint_{V_0} g^{\mu} u^{\nu} u_{\nu}\, dV_0 = +\frac{d}{d\tau}\iiint_{V_0} g^{\mu}\, dV_0 = \iiint_{V_0} D_{\tau} g^{\mu}\, dv_0 = \dot{G}^{\mu}$$

$\dot{G}^{\mu}$ est la dérivée, le long de la ligne de courant, de l'impulsion de la gouttelette.

Posons

$$\iiiint \partial_{\nu}\Theta^{\mu\nu}\, d\omega = -\iiiint j^{\mu}\, d\omega = -F^{\mu} = \text{force de tension totale exercée sur la gouttelette}$$

on a alors $\dot{G}^{\mu} = F^{\mu}$ (5).

Passons à l'étude du moment cinétique, on a

$$\partial_{\lambda}(x^{\nu} T^{\mu\lambda} - x^{\mu} T^{\nu\lambda}) = x^{\nu}\partial_{\lambda} T^{\mu\lambda} - x^{\mu}\partial_{\lambda} T^{\nu\lambda} + T^{\mu\nu}_{\vee} = T^{\mu\nu}_{\vee}$$

en vertu de (3). Le moment de $T^{\mu\nu}$ n'est donc pas conservatif, car il ne contient pas les variations de $\mathcal{L}$ obtenues par modifications de la rotation interne.

Or on sait (6) que si $(S_{\mu\lambda})_{op}$ est une transformation infinitésimale de Lorentz et si l'on pose $f_{[\lambda\mu]\nu} = \partial\mathcal{L}/\partial q_{\nu} \left(S_{\mu\lambda}^{\vee}\right)_{op} q$, le tenseur $\sigma_{[\nu\mu\lambda]} = 1/2[f_{\nu\mu\lambda} + f_{\mu\lambda\nu} + f_{\lambda\nu\mu}]$ représente la densité de spin [ce qui est bien conforme aux principes relativistes (7)]; alors, le tenseur $t_{\mu\nu} = \partial^{\lambda}\sigma_{[\nu\mu\lambda]} - \partial^{\lambda} f_{\lambda\nu\mu}$ est tel que $\partial_{\nu} t^{\mu\nu} = 0$ [d'après (1)] et que le tenseur *symétrique* $\mathcal{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}$ est conservatif, *ainsi que son moment*. C'est le tenseur d'impulsion total.

On peut alors écrire (Même méthode que précédemment) :

$$\iiiint \partial_{\lambda}(x^{\nu}\mathcal{T}^{\mu\lambda} - x^{\mu}\mathcal{T}^{\nu\lambda})\, d\omega = \iiiint T^{\mu\lambda}_{\vee}\, d\omega + \iiiint t^{\mu\nu}_{\vee}\, d\omega = 0$$

d'où

$$\iiiint T^{\mu\nu}_{\vee}\, d\omega = \iiiint \partial^{\lambda} f_{\lambda\nu\mu}\, d\omega - \iiiint \partial^{\lambda}\sigma_{[\nu\mu\lambda]}\, d\omega$$

soit

$$\iiiint T^{\mu\nu}_{\vee}\, d\omega = \iiint_S f_{\lambda\nu\mu}\, d\sigma^{\lambda} - \iiint_P \sigma_{[\nu\mu\lambda]}\, d\sigma^{\lambda} + \frac{d}{d\tau}\left[\iiint_{V_0} \sigma_{[\nu\mu\lambda]}\, u^{\lambda}\, dv_0\right] d\tau. \tag{4}$$

Le tenseur $s_{[\mu\nu]} = \sigma_{[\nu\mu\lambda]} u^{\lambda}$ qui est tel que $s_{[\mu\nu]} u^{\nu} = 0$ n'est autre que le tenseur de Weyssenhoff (8).

---

(5) VON LAUE, *loc. cit.*, p. 243.

(6) BELINFANTE et ROSENFELD, *loc. cit.*,

(7) LOUIS DE BROGLIE, *La théorie des particules de spin* 1/2 (électrons de Dirac).

(8) *Loc. cit.*,

Le tenseur $S_{\mu\nu} = \iiint_{V_0} s_{\mu\nu}\, dv_0$ représente le spin d'une gouttelette dans son système propre et vérifie $S_{\mu\nu} u^\nu = 0$ si la gouttelette est suffisamment petite ([9]).

Or, on a $T^{\mu\nu}_{\vee} = 1/2\,(g^\mu u^\nu - g^\nu u^\mu) + \Theta^{\mu\nu}_{\vee}$ et

$$\frac{d}{d\tau}\left[\iiint_{V_0} \sigma_{[\nu\mu\lambda]}\, u^\lambda\, dv_0\right] = \iiint_{V_0} D_\tau(s_{\nu\mu})\, dv_0 = \dot{S}_{\mu\nu}.$$

On tire de (4)

$$\iiiint (g^\mu u^\nu - g^\nu u^\mu)\, d\omega - \dot{S}^{\mu\nu} = 2\iiiint \Theta^{\mu\nu}_{\vee}\, d\omega + \iiint_P \sigma_{\mu\nu\lambda}\, d\sigma^\lambda + \iiint_S f_{\lambda\mu\nu}\, d\sigma^\lambda = K^{\mu\nu};$$

$K^{\mu\nu}$ représente une « torsion » du fluide qui comprend un terme en $\Theta^{\mu\nu}$ représentant les tensions internes, une intégrale d'hyperparoi représentant l'évolution d'actions superficielles et une intégrale exprimant des actions de volume, ces deux dernières étant dues au spin du fluide.

On a donc les équations

(I) $$S^{\mu\nu} u_\nu = 0,$$

(II) $$G^\mu u^\nu - G^\nu u^\mu = \dot{S}^{\mu\nu} + K^{\mu\nu},$$

(III) $$G^\mu = m_0 u^\mu + S^{\mu\nu} \dot{u}_\nu + K^{\mu\nu} u_\nu,$$

qui généralisent aux fluides dotés de pression les équations de Weyssenhoff ([10]).

Dans un travail ultérieur, nous utiliserons ces considérations pour étendre le « modèle » hydrodynamique de l'interprétation causale ([11]) au cas des particules relativistes dotées de spin ([12]).

ÉLETRONIQUE. — *Le carmatron, nouvel oscillateur à large bande d'accord électronique.* Note (*) de MM. **Robert Warnecke**, **Jean Nalot**, **Bernard Epsztein** et **Oscar Dœhler**, présentée par M. Camille Gutton.

Dans le carcinotron M ([1]), ([2]), un faisceau électronique se déplace perpendiculairement à des champs électrique et magnétique croisés et est en intérac-

---

([9]) *Idem.*

([10]) Louis de Broglie, *loc. cit.*, p. 57.

([11]) Bohm et Vigier, *Phys. Rev.*, 96, 1954, p. 208-216.

([12]) Cette extension existe déjà dans le cas non relativiste (équation de Pauli). *Cf.* Bohm, Schiller, Tiomno, *Nuovo Cimento*. Supp. 1, 1955.

(*) Séance du 5 septembre 1955.

([1]) P. Guénard, O. Doehler, B. Epsztein et R. Warnecke, *Comptes rendu*, 235, 1952, p. 236.

([2]) R. Warnecke, P. Guénard, O. Doehler, et B. Epsztein, *Proc. I. R. E.*, 43, avril 1955, p. 413.

tion avec une onde électromagnétique « inverse » se propageant le long d'une ligne à retard à structure périodique. La sortie H. F. pour le prélèvement de l'énergie haute fréquence se trouve à côté du canon électronique, l'extrémité à côté du collecteur est munie de moyens d'absorption pour éviter des réflexions.

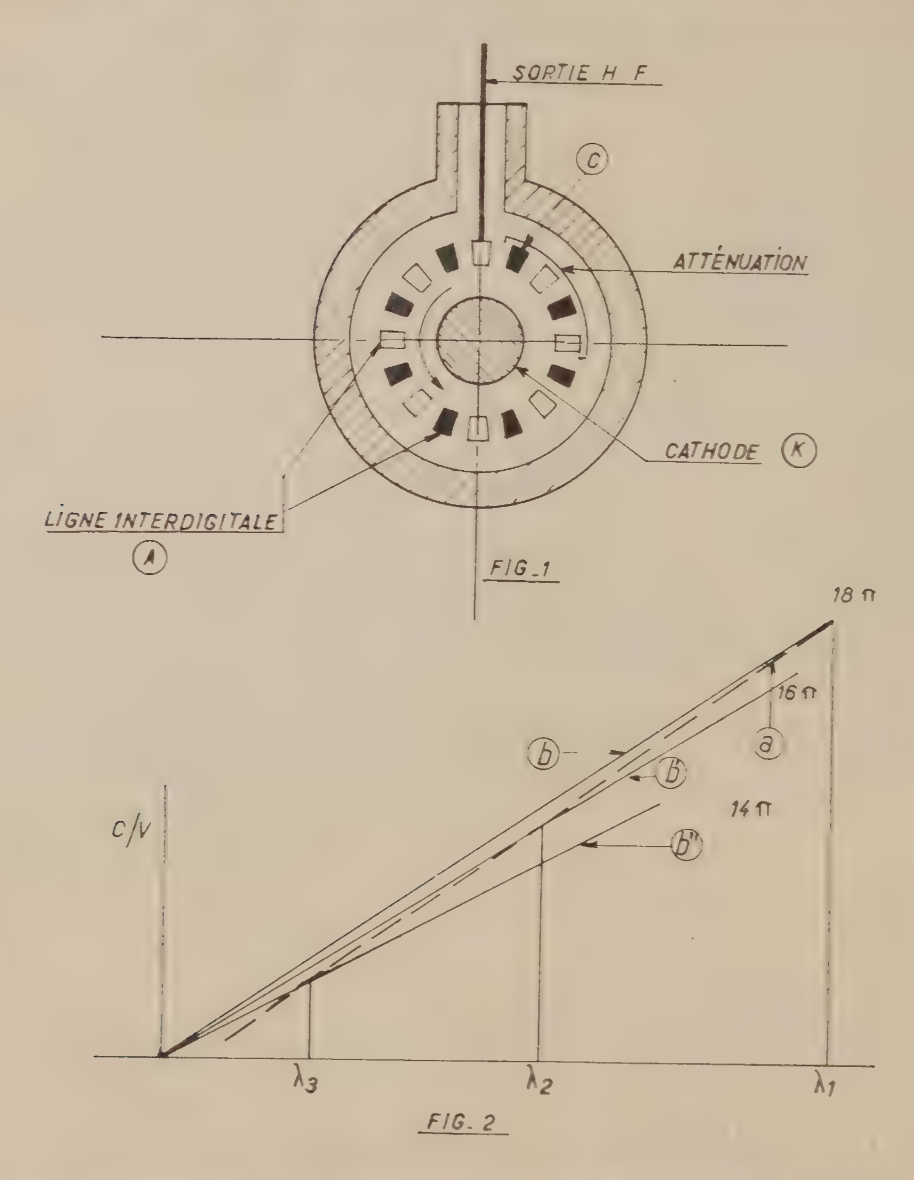


FIG. 1

FIG. 2

Les deux extrémités de la ligne ne sont couplées ni par des champs électromagnétiques ni par le faisceau. Le carcinotron M possède une large bande

d'accord électronique; la puissance de sortie et la fréquence d'oscillation sont peu sensibles à une variation de la charge. En contrepartie, la structure est relativement compliquée et encombrante. Par ailleurs, la cathode, « localisée », a une faible surface ce qui limite soit l'énergie fournie, soit la durée de fonctionnement.

Dans le magnétron usuellement utilisé pour la production d'ondes UHF, le circuit est une ligne à retard fermée sur elle-même et le faisceau électronique circule autour d'une cathode « continue » qui peut avoir de grandes dimensions. Les extrémités du circuit en question sont couplées par le faisceau et par le champ de haute fréquence. Le magnétron a une structure relativement simple mais n'est pratiquement pas accordable électroniquement; d'autre part, la puissance et la fréquence sont très sensibles à une variation de la charge.

L'objet de la présente Note est d'indiquer le principe d'un nouvel oscillateur, le carmatron, qui réunit les avantages du carcinotron M et du magnétron. La figure 1 représente schématiquement ce tube qui comporte essentiellement une cathode cylindrique K et un circuit anodique A lui-même constitué par un circuit à retard à structure périodique faiblement dispersif. L'énergie produite est transférée à la charge par une ligne coaxiale. La ligne à retard est court-circuitée en C, au voisinage de la sortie et est munie d'une atténuation. Le champ magnétique constant et homogène perpendiculaire à la figure est dirigé de telle façon que les électrons tournent dans le sens trigonométrique. Dans une telle structure la sortie HF et l'extrémité C de la ligne ne sont pas couplées par des champs HF mais par le faisceau électronique qui circule autour de la cathode.

Un tel tube est une variante particulière du carcinotron M dans laquelle le faisceau est « rentrant ». Il oscille si le courant alternatif transporté par le faisceau rentrant est en phase avec le champ H. F., c'est-à-dire si l'angle de transit du faisceau autour de la cathode est un multiple de 2π. Si ψ est l'angle de phase entre deux cellules successives et N le nombre total des cellules, la phase totale est $N\psi$. Pour $\psi = \text{const.}$, le taux de retard (c/v_{ph}) (v_{ph}, vitesse de phase de l'onde en interaction avec le faisceau), en fonction de la longueur d'onde λ, est donné par [3], [4] :

$$\frac{c}{v_{ph}} = \frac{\psi}{\pi} \frac{\lambda}{2p};$$

p, pas de la ligne. Pour $N\psi = 2K\pi$ (K étant un nombre entier), les courbes c/v_{ph} en fonction de λ sont des droites b, b', b'' (*fig.* 2). Des oscillations existent pour des longueurs d'onde λ_1, λ_2, ... pour lesquelles ces droites sont en interaction avec la courbe a représentant la dispersion de la ligne. Si les électrons

(3) P. Guénard, O. Doehler et R. Warnecke, *Comptes rendus*, 235, 1952, p. 52.

(4) A. Leblond, J. Nalot et O. Doehler, *Comptes rendus*, 235, 1952, p. 1949.

tournaient indéfiniment autour de la cathode, ces oscillations ne se produiraient que pour les valeurs discrètes λ_1, λ_2, .., mais, en fait, à cause des modifications des trajectoires par le champ électrique H.F. élevé (effet des « grands signaux ») et aussi en conséquence de « l'effet diocotron » ([5]), ([6]), les électrons finissent par aboutir sur les électrodes. La durée de vie d'un électron donné circulant autour de la cathode est ainsi relativement petite. Cette perte de courant électronique, qui dans l'analyse des phénomènes intervient comme une atténuation, permet l'oscillation autour des longueurs d'onde discrètes précitées, c'est-à-dire fournit la possibilité d'un accord électronique du tube. L'analyse des conditions d'accrochage montre que la bande d'accord électronique est d'autant plus grande que la dispersion de la ligne à retard est faible et que les pertes de courant autour de la cathode sont grandes. Le courant d'accrochage est nul si la perte du courant est nulle et croît linéairement avec les pertes par unité de longueur. Sur la base de la théorie actuellement établie, des bandes d'accord de 25 à 30 % sont possibles et compatibles avec des rendements relativement élevés. Expérimentalement, le principe a été vérifié avec un modèle fonctionnant dans la bande des 3 000 Mc/s.

PHYSIQUE NUCLÉAIRE. — *Corrélation angulaire des électrons de paires de la transition monopolaire de* ^{16}O (6,05 MeV); *spectre d'énergie de ces paires.* Note (*) de MM. **Serge Gorodetzky, Raymond Armbruster, Pierre Chevallier, André Gallmann** et **Robert Manquenouille**, présentée par M. Louis de Broglie.

Nous avons étudié la corrélation angulaire des électrons positifs et négatifs de paires de la transition monopolaire de l'oxygène 16 au moyen de l'appareil décrit dans une publication précédente ([1]). Cet appareil a pour principale caractéristique de permettre l'addition des énergies des électrons de paires et en même temps de mesurer l'énergie de chaque électron.

La transition monopolaire est due au passage du premier état excité du niveau 6,05 MeV $J = O^+$ au niveau fondamental $J = O^+$. Ce niveau de ^{16}O est obtenu par la réaction $^{19}F(p, \alpha)^{16}O$.

Une cible de CaF_2 est bombardée par des protons de 1 050 keV, son épaisseur étant dans ces conditions de 100 keV.

L'étude théorique des transitions monopolaires a été faite par J. R. Oppen-

---

([5]) P. Guénard et H. Huber, *Ann. Rad.*, Octobre 1952, p. 252.

([6]) R. Warnecke, P. Guénard et O. Doehler, *Onde Électrique*, 325, avril 1954.

(*) Séance du 8 août 1955.

([1]) *Comptes rendus*, **241**, 1955, p. 482.

heimer ([2]), R. H. Dalitz ([3]). La corrélation angulaire de ces paires a été mesurée par divers auteurs ([4]) et ([5]). Notre appareil nous permet une mesure de corrélation précise (*fig.* 1). On notera particulièrement les résultats obtenus jusqu'à l'angle de 180°. Ceci tient à ce qu'on n'est pas gêné par des électrons diffusés.

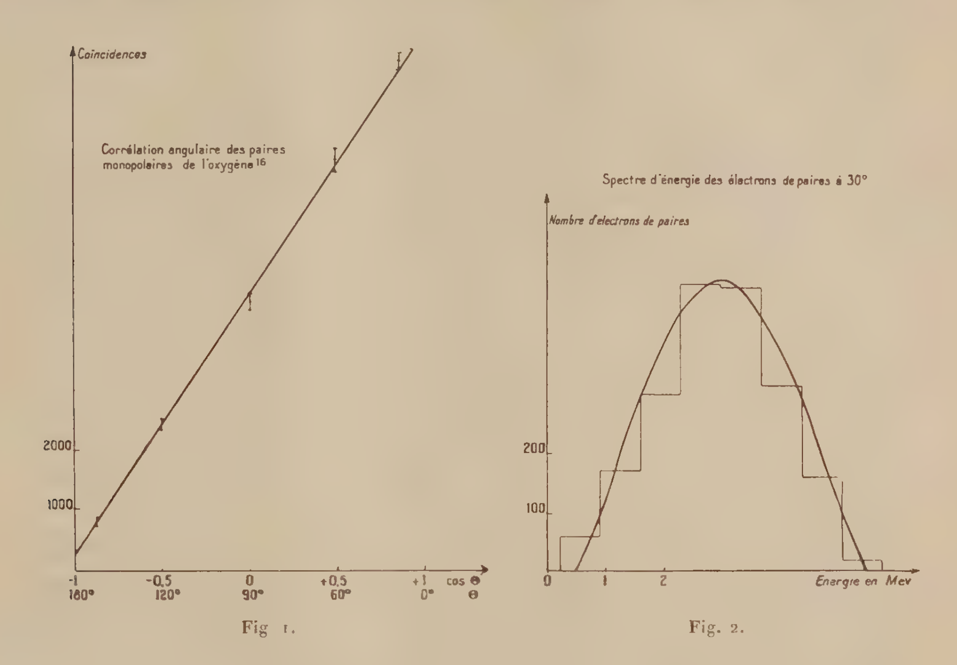


Fig. 1.

Fig. 2.

La relation de corrélation donnée théoriquement dans le cas d'une « géométrie parfaite » est

$$W(\theta) = 1 + 0,9937 \cos\theta.$$

Si l'on corrige ceci pour s'adapter aux conditions géométriques utilisées ici, on obtient

$$W(\theta) = 1 + (0,962 \pm 0,003) \cos\theta.$$

Nous obtenons expérimentalement

$$W(\theta) = 1 + (0,955 \pm 0,007) \cos\theta$$

Le spectrographe à coïncidence que nous avons réalisé est bien propor-

([2]) *Phys. Rev.*, 60, 1941, p. 164.
([3]) *Proc. Roy. Soc.*, A, 206, 1951, p. 521.
([4]) S. Devons, S. G. Goldring, G. R. Lindsay, *Proc. Phys. Soc.*, A, 67, 1954, p. 134.
([5]) G. C. Phillips et N. P. Heydenburg, *Phys. Rev.*, 83, 1951, p. 184.

tionnel. Ceci permet de mesurer la répartition d'énergie des électrons et des positrons de paires (spectre d'énergie) pour différents angles (*fig.* 2 et 3). On donne la courbe théorique et l'histogramme obtenu expérimentalement. Ces spectres ont pour différents angles une allure assez voisine sauf au voisinage de 180° (*fig.* 4). La courbe théorique passe par un minimum à 180° ; ce minimum est nul.

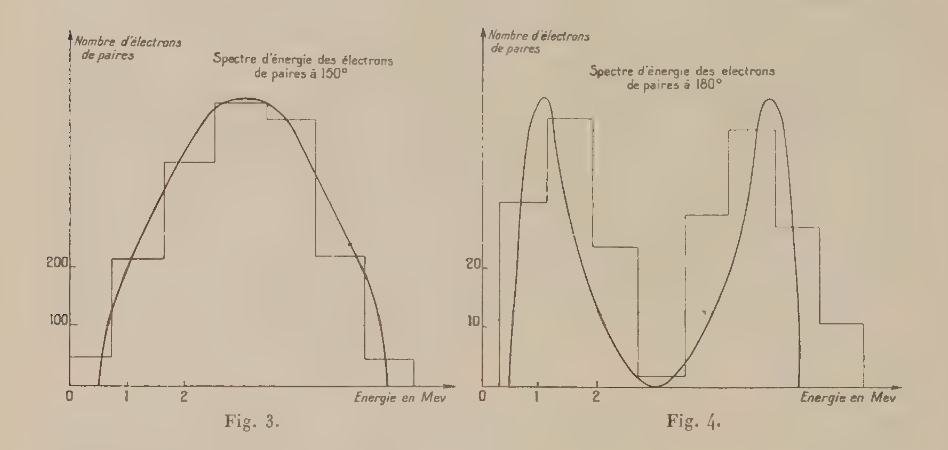


Fig. 3.

Fig. 4.

L'histogramme à 180° correspond à un nombre de mesures relativement faible, de ce fait la précision est un peu moins bonne, cependant le minimum nul apparaît d'une manière indiscutable. Ce minimum est dû à ce que les électrons de paires ne peuvent être émis en direction opposée, avec la même énergie.

Les mesures d'énergies sont faites sur un oscillogramme cathodique type 303 AH Dumont. Les hauteurs des impulsions sont proportionnelles à l'énergies des électrons.

PHYSIQUE NUCLÉAIRE. — *Mesure préliminaire du moment magnétique de l'état excité de* ^{19}F *à* 197 keV. Note (*) de MM. **Pierre Lehmann**, **Antoine Lévêque** et **Marcel Fiehrer**, transmise par M. Francis Perrin.

La perturbation par un champ magnétique de la distribution angulaire des γ de 197 keV consécutifs à la diffusion inélastique des protons sur ^{19}F a permis de déterminer une valeur préliminaire du moment magnétique de cet état égale à $4{,}0 \pm 0{,}9$ magnétons nucléaires. L'augmentation possible de cette valeur si l'on tient compte des effets d'interaction quadrupolaire est discutée.

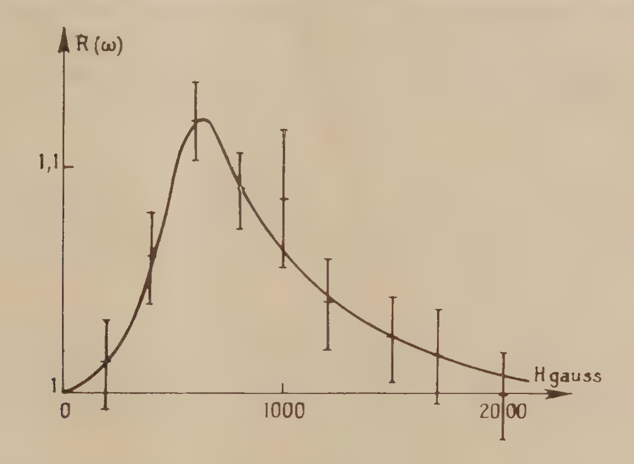
(*) Séance du 29 août 1955.

Le temps de vie de l'état excité de ^{19}F(197 keV, 5/2+) est de $(1,0\pm0,2)10^{-7}$ s[1]; cette longue vie rend possible la mesure du moment magnétique par l'étude de la perturbation de la distribution angulaire des γ sous l'influence d'un champ magnétique appliqué en milieu liquide.

Cette distribution angulaire, dans un plan perpendiculaire au champ, est de la forme

$$W(\theta)=\int_0^{+\infty}\{1+A_2\,e^{-\lambda_2 t}P_2[\cos(\theta-\omega t)]\}\,e^{-\lambda t}\,dt,$$

λ_2 étant une constante caractéristique de l'atténuation de la distribution due aux effets quadrupolaires dans le liquide [2], θ l'angle entre la direction des protons incidents et la direction d'observation des γ, $\omega=\mu H/I\hbar$ la vitesse angulaire de la précession de Larmor, et λ la constante radioactive de l'état.



Nous avons mesuré, pour un angle $\theta=30°$, le rapport

$$R=\frac{W(+\theta,\omega)}{W(-\theta,\omega)}=\frac{W(-\theta,-\omega)}{W(+\theta,-\omega)}$$

des taux de comptage de deux détecteurs disposés symétriquement par rapport au faisceau incident en fonction du champ magnétique appliqué H; ce rapport passe par un maximum pour

$$\omega_m=\frac{\mu H_m}{I\hbar}\simeq\frac{\lambda}{2}\left[1+\frac{\lambda_2}{\lambda}\right].$$

Les protons produits par l'accélérateur électrostatique de Saclay bombar-

---

(1) G. A. Jones, W. R. Phillips, C. M. P. Johnson et D. H. Wilkinson, *Phys. Rev.*, **96**, 1954, p. 547; J. Thirion, C. A. Barnes et C. C. Lauritsen, *Phys. Rev.*, **94**, 1954, p. 1076.

(2) A. Abragam et R. V. Pound, *Phys. Rev.*, **92**, 1953, p. 943.

daient une solution de fluorure de potassium dans l'eau à 600 g/l. Les impulsions provenant des détecteurs à scintillations, protégés des γ ne venant pas directement de la cible, et blindés contre le champ de fuite de l'électroaimant, étaient analysées par des sélecteurs d'amplitude à 10 canaux.

La figure montre les résultats obtenus dans une des trois séries de mesures qui ont été effectuées. De l'ensemble de ces expériences, on tire $H_m = 650 \pm 80$ gauss, d'où l'on déduit une limite inférieure du moment magnétique $\mu = +4,0 \pm 0,9$ magnétons nucléaires en tenant compte d'une erreur de 20 % sur le temps de vie de l'état ([1]).

La constante d'interaction quadrupolaire λ_2 est proportionnelle à la viscosité de la solution ([3]). Les mesures ont donc été refaites avec une solution de fluorure de potassium de concentration moitié, dont la viscosité est de 1,1 cP au lieu de 1,5. La courbe obtenue est semblable aux précédentes; elle n'est toutefois pas assez précise pour permettre d'exclure une diminution de H_m de 50 gauss ce qui accroîtrait μ de 35 %. Toutefois, un effet si important semble peu probable, en particulier si l'on compare aux évaluations de Christy sur l'atténuation de la corrélation pour une source solide ([4]).

CHIMIE ORGANIQUE. — *Application de la méthode de Tschugaeff-Zerewitinoff à certaines γ-lactones saturées.* Note (*) de M. **Bernard Gastambide**, présentée par M. Marcel Delépine.

Trois méthodes différentes permettent de préparer un certain nombre d'esters paraconiques. L'action, à la température ordinaire, de l'iodure de méthylmagnésium sur les esters paraconiques selon la méthode de Tschugaeff-Zerewitinoff produit un dégagement gazeux dont l'importance dépend de la structure de l'ester utilisé. Quelques hypothèses sont proposées pour expliquer ce fait.

Préparation des esters paraconiques. — Par action du zinc en poudre sur un mélange d'α-bromo α-méthyl succinate d'éthyle et de méthoxy-6 propionyl-2 naphtalène nous avons obtenu ([1]) deux composés qui semblent correspondre aux racémiques $C_{21}H_{24}O_5$ (I) et (I') : F 133° (analyse : trouvé %, C 70,64 H 7,01; calculé %, C 70,77 H 6,79), huile (analyse : trouvé %, C 71,33 H 6,77). Ces composés donnent par saponification un β-hydroxy ester non stable qui se scinde quantitativement en acide méthyl succinique et méthoxy-6 propionyl-2 naphtalène.

Cette méthode de préparation étant assez nouvelle, donc peu sûre, nous avons synthétisé quelques autres esters paraconiques par des voies plus classiques. L'action du *t*-amylate de sodium sur le succinate d'éthyle et la propiophénone (réaction de Stobbe) permet d'obtenir, après lactonisation bromhydrique du semi-ester, le γ-phényl γ-éthyl paraconate d'éthyle

---

(3) P. B. Hemmig et R. M. Steffen, *Phys. Rev.*, **92**, 1953, p. 832.

(4) R. F. Christy, *Phys. Rev.*, **94**, 1954, p. 1077.

(*) Séance du 5 septembre 1955.

(1) A paraître prochainement.

(II) $C_{15}H_{18}:O_4$ $É_{0,05}$ 128-131°, (analyse : trouvé %, C 68,82 H 7,30; calculé %, C 68,68 H 6,92). Comme pour les composés (I) et (I′), la structure de ce produit est confirmée par saponification. Le γ-γ-pentaméthylène paraconate de méthyle (III) $C_{11}H_{16}O_4$ F 75°,5, déjà connu, se prépare également par réaction de Stobbe [2]. Enfin le γ-phényl paraconate de méthyle (IV) $C_{12}H_{12}O_4$ F 69°,5, déjà décrit dans la littérature [3], s'obtient en condensant, selon la méthode de Fittig, le succinate de sodium avec l'aldéhyde benzoïque et en estérifiant par le diazométhane. La structure paraconique des composés (I), (I′), (II), (III), (IV) est confirmée par les spectres infrarouges : CO ester vers 1737 cm^{-1}, CO lactonique vers 1792 cm^{-1}. MM. Horeau et Jacques [4] nous ont donné un échantillon de γ-(*p*-méthoxy phényl) δ-méthyl δ-carbéthoxy γ-caprolactone $C_{17}H_{22}O_5$ (V).

O

α R

O

γ CO₂ R′

R‴ R″

	R.	R′.	R″.	R‴.
(I), (I′)........	CH_3	C_2H_5	C_2H_5	Méthoxy-6 naphtyl-2
(II)...........	H	C_2H_5	C_2H_5	Phényl
(III)...........	H	CH_3	→	—$(CH_2)_5$—
(IV)...........	H	CH_3	H	Phényl

Dosages de Tschugaeff-Zerewitinoff. — Si l'on traite les composés (I) et (I′) par de l'iodure de méthyl magnésium en solution dans un mélange d'oxyde d'isoamyle et de xylène, on observe un fort dégagement gazeux. Le volume mesuré augmente pendant une dizaine de minutes et se stabilise à une valeur égale ou légèrement inférieure au volume de méthane qui correspond à un hydrogène mobile. Nous avons également soumis les autres lactones-esters à la méthode de Tschugaeff-Zerewitinoff et avons calculé le pour-cent de gaz dégagé par rapport au volume qui correspond à un hydrogène mobile : (II) 86 % en 19 mn; (III) 81 % en 43 mn; (IV) 56 % en 43 mn; (V) 0 % environ.

Essais d'interprétation des résultats. — Nous ferons quelques remarques :

1° En traitant les γ-lactones *éthyléniques* par de l'iodure de méthyl magnésium, plusieurs auteurs ont obtenu des dégagements de méthane. Ceux-ci seraient dus à un atome d'hydrogène, non déterminé, du cycle lactonique. Cependant, il ne semble pas possible d'étendre cette explication aux esters paraconiques pour les raisons suivantes : le sodium et l'amidure de sodium n'attaquent pas les γ-lactones saturées [5] et le méthyl succinate d'éthyle, selon nos expériences, ne donne aucun dégagement gazeux avec CH_3MgI.

(2) W. S. Johnson, Davis, Hunt et Stork, *J. Amer. Chem. Soc.*, 70, 1948, p. 3021.

(3) Barbier et Locquin, *Bull. Soc. Chim.*, [4], 13, 1913, p. 229.

(4) *Bull. Soc. Chim.*, 1952 M, p. 527.

(5) Michael et Weiner, *J. Amer. Chem. Soc.*, 58, 1936, p. 999.

2° Les magnésiens transforment les composés $RR'R''C—CO_2R$ en forme énolique de la cétone intermédiaire, ceci en raison de l'empêchement stérique présenté par la fonction carbonyle. Il semble difficile d'admettre une telle énolisation chez les esters paraconiques puisque les composés (I), (I') et (II), très différents les uns des autres du point de vue stérique, ont des vitesses de réaction sensiblement égales.

3° Le cycle lactonique s'ouvrirait-il sous l'influence de la solution magnésienne en donnant un acide éthylénique? La vitesse du dégagement gazeux semble, en effet, d'après les quelques cas mentionnés ici, dépendre de la facilité avec laquelle la double liaison peut apparaître, la double liaison se plaçant, de préférence, en β-γ du groupement ester. Rappelons que les esters paraconiques se transforment facilement en acides éthyléniques sous l'influence du sodium ou des alcoolates et que les γ-lactones donnent lieu vers 200° à un équilibre lacto-énoïque. Cependant cette hypothèse est infirmée par la nature des produits résultant de l'action des magnésiens sur les esters α-cétoparaconiques (6) et sur les composés (I) ou (I') : avec les premiers, on isole uniquement des produits normalement attendus; avec les seconds, on obtient, selon nos expériences, une huile extractible à la soude, trop volatile pour être l'acide éthylénique correspondant à l'ouverture du cycle lactonique.

Nous poursuivons actuellement nos recherches dans ce domaine.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur la préparation de la propargylamine par la méthode de Delépine* (1). Note (*) de M. **Israël Marszak** et Mme **Andrée Marszak-Fleury**, présentée par M. Marcel Delépine.

La propargylamine a été préparée avec un rendement de l'ordre de 50 % à partir du composé d'addition du benzène sulfonate de propargyle et de l'hexaméthylène tétramine.

Les amines primaires à fonction acétylénique vraie nous semblent présenter un intérêt particulier pour diverses synthèses. Le premier terme, la propargylamine, a été préparé pour la première fois par C. Paal et C. Hermann (2) en 1889, à partir de la $\beta.\gamma$-dibromopropylamine. Ces chercheurs n'ont pu l'isoler, mais en ont préparé différents sels. Dernièrement, J. Chauvelier et

---

(6) Ghilardi et Gault, *Comptes rendus*, **234**, 1952, p. 337.

(*) Séance du 29 août 1955.

(1) Document retiré du pli cacheté n° **13.025** déposé le 10 décembre 1952 ouvert à la demande des auteurs le 22 août 1955.

(2) *Ber. d. chem. Gesells.*, **22**, 1889, p. 3075.

M. Gaudemar (3) ont étudié la réaction d'Hofmann avec le bromure de propargyle et ont réussi à isoler à l'état pur, à partir du mélange de bases obtenu, la propargylamine, la dipropargylamine et la tripropargylamine.

Il nous a paru intéressant d'établir un procédé fournissant la seule amine primaire. Ainsi, nous avons été amenés à essayer, dans la série acétylénique, la méthode Delépine (4), (5) pour la préparation des amines primaires à partir des halogénures d'alcoyle et de l'hexaméthylène tétramine.

Nous avons choisi comme matière première le benzène sulfonate de propargyle (6), qui s'obtient avec d'excellents rendements à partir de l'alcool propargylique.

Avec l'hexaméthylène tétramine, cet ester a fourni, de façon pratiquement quantitative un composé d'addition F 178°. Ce dernier a été décomposé par l'acide chlorhydrique hydroalcoolique; le processus de décomposition a été répété plusieurs fois en chassant au fur et à mesure l'acétal formé et en essorant les sels d'ammonium qui précipitent. Le mélange, concentré, a été alcalinisé par la soude en excès et soumis à une extraction continue par l'éther.

La propargylamine contenue dans la solution a été directement transformée en son chlorhydrate $HC \equiv C.CH_2.NH_2$, Cl H F 179° (alcool-éther) qui a été ainsi obtenu avec un rendement de l'ordre de 50 % par rapport à l'alcool propargylique employé.

A partir de ce chlorhydrate, on a isolé la propargylamine libre, É 82-83°; $n_D^{14,5}$ 1,4500 (Chauvelier et Gaudemar indiquent, É 84°; n_D^{15} 1,4495).

Le dérivé acétylé de la propargylamine $HC \equiv C.CH_2NH.CO.CH_3$ F 85° (benzène) produit, à notre connaissance pas encore décrit dans la littérature, a été préparé par action de l'anhydride acétique et de l'acétate de soude sur la solution aqueuse de son chlorhydrate.

On a obtenu aussi le dérivé *p*-nitrobenzoylé $HC \equiv C.CH_2.NH.CO.C_6H_4(NO_2)$ F 188° (benzène).

Nous étudions les réactions de la propargylamine et essayons de généraliser cette méthode à l'obtention d'autres amines acétyléniques vraies ou disubstituées.

---

(3) *Comptes rendus*, **232**, 1951, p. 167.

(4) M. Delépine, *Comptes rendus*, **120**, 1895, p. 501; **124**, 1897, p. 292; *Bull. Soc. Chim.*, **17**, 1897, (3), p. 1290.

(5) M. Delépine et Mme Jaffeux, *Bull. Soc. Chim.*, **31**, 1922, (4), p. 108.

(6) O. Schlichting et K. Klager, U. S. A. P. 2.340.701.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur la dissociation de quelques diacides organiques dissymétriques α.α-diarylés.* Note (*) de MM. **Henri Le Moal** et **François Salmon-Legagneur**, présentée par M. Charles Dufraisse.

Les diacides étudiés, de formule générale : $(C_6H_5)_2C(CO_2H)(CH_2)_n CO_2H$, avec $n = 3, 4, 5, 6$, ont été préparés et isolés, pour la première fois, par l'un de nous (1). Les constantes de dissociation expérimentales de chaque diacide K_1 et K_2 ont été mesurées, ainsi que celles des deux acides-esters méthyliques correspondants : K' et K''. La comparaison des résultats avec ceux déjà obtenus pour les homologues inférieurs ($n = 1$ et 2), fournit des renseignements sur la structure de ces diacides et leur comportement chimique.

Les mesures de K_1, K_2, K' et K'' ont été faites dans l'eau à 20°, sous atmosphère d'azote, suivant une technique déjà indiquée et discutée par l'un de nous (2). L'appareil utilisé est un pH mètre de précision, à électrode de mesure en verre et électrode de référence au calomel.

La faible solubilité dans l'eau des diacides étudiés et de leurs acides-esters, conduit à utiliser lors des mesures des solutions pratiquement saturées. Leur concentration est déterminée potentiométriquement. Dans ces conditions expérimentales, la précision est au mieux de $\pm 0,04$ pH pour les pK_1, pK' et pK'' et de $\pm 0,10$ pour les pK_2. Il est donc indispensable de répéter les mesures un grand nombre de fois.

1. *Mesures de* K_1 *et* K_2. — Le tableau I rassemble les résultats obtenus :

Tableau I.

n.	Concentration. Solution acide (mol/l).	pK_1.	$K_1 . 10^5$.	pK_2.	$K_2 . 10^6$.
3..........	$9,5 \cdot 10^{-4}$	4,17	6,80	5,40	4,0
4..........	4,70 »	4,28	5,25	5,39	4,1
5..........	4,90 »	4,31	4,90	5,38-39	4,1
6..........	1,68 »	4,32-33	4,7	5,38	4

2. *Mesure des constantes* K' *et* K''. — Tous les acides-esters sont préalablement dissous dans 5 ou 10 cm³ d'éthanol pur et la solution est versée dans de l'eau bidistillée. Le volume du mélange est ajusté à 1 000 cm³. La dissolution des acides-esters doit être faite à froid pour éviter une hydrolyse possible. Une

(*) Séance du 29 août 1955.

(1) Salmon-Legagneur, *Comptes rendus*, **236**, 1953, p. 2154 et **240**, 1955, p. 2320; Salmon-Legagneur et C. Neveu, *Comptes rendus*, **237**, 1953, p. 64 et **240**, 1955, p. 1229.

(2) H. Le Moal, *Thèse de Doctorat*, Paris, 1952; *Ann. Chimie*, (12), **8**, 1953, p. 871.

quantité de soude titrée est préalablement ajoutée au mélange pour obtenir au départ une solution plus concentrée en acide-ester. Après stabilisation de la solution, celle-ci est filtrée et les mesures sont faites sur le filtrat aux environs de la demi-neutralisation.

Au-delà de $n = 5$, la solubilité des acides-esters devient trop faible et la mesure de K′ et K″ illusoire. Le tableau II rassemble les résultats obtenus :

TABLEAU II.

n.	pK′.	K′.10⁵.	pK″.	K″.10⁵.
3.................	4,26	5,50	4,84	1,44
4.................	4,40	3,95	4,97	1,08
5.................	4,50	3,15	5,08	0,83

3. L'examen des résultats précédents conduit aux conclusions suivantes :

a. La constante globale K_1 est égale à la somme $K' + K''$, aux erreurs expérimentales près, du moins pour $n = 3$ et 4. Il en résulte que l'hypothèse de Barton ([3]) est valable pour les acides étudiés, comme elle l'était pour l'homologue inférieur, $n = 2$ ([2]). Dans ces conditions, comme l'un de nous l'a déjà montré ([2]), il est possible de calculer les quatre constantes de dissociation d'un diacide dissimétrique, à savoir : K_α et K_β constantes de dissociation primaires, relatives à chaque carboxyle, K_γ et K_δ, constantes de dissociation secondaires, relatives à chaque anion primaire.

b. La validité de l'hypothèse de Barton permettrait d'envisager celle de la loi de Bjerrum et de déduire des résultats précédents une valeur plausible pour la distance des deux groupements carboxyles.

L'imprécision sur les valeurs de K′ et K″ rend un tel calcul illusoire pour $n = 5$ et au delà. Le tableau III rassemble les résultats relatifs aux paragraphes *a* et *b*.

TABLEAU III.

n.	$K_\alpha.10^5$.	$K_\beta.10^5$.	$K_\delta.10^5$.	$K_\gamma.10^5$.	*r* calculé Å.
3.................	5,50	1,44	1,86	0,50	6,7
4.................	3,95	1,08	1,95	0,52	10
5.................	3,15	0,83	1,97	0,51	–

c. L'allure générale des phénomènes observés dans la série des diacides étudiés, de $n = 2$ à $n = 6$, est sensiblement analogue à celle constatée pour les diacides aliphatiques normaux, pour *n* variant de 1 à 9 ([4]). Les pK_2 restent pratiquement constants et la différence $\Delta = pK_2 - pK_1$ diminue régulièrement

([3]) *Nature*, **160**, 1947, p. 752.

([4]) M.-L. DONDON, *Comptes rendus*, **238**, 1954, p. 1223.

lorsque n croît. Mais le phénomène dans les deux cas, est très différent pour $n=1$ et se traduit dans le cas du diacide $\alpha\alpha$-disubstitué par un accroissement considérable de la différence $\Delta = pK_2 - pK_1$. Nous donnerons ultérieurement l'explication de cet accroissement.

CYTOLOGIE. — *Examen au microscope électronique de la zone de Golgi des spermatides de Rat.* Note (*) de M. **Yves Clermont** et Mlle **Françoise Haguenau**, présentée par M. Robert Courrier.

Il est facile d'identifier au microscope électronique la zone de Golgi des jeunes spermatides de Rat parce qu'elle est adjacente à l'appareil acrosomique ([1]). Le microscope électronique permet en outre d'affirmer qu'il s'agit bien effectivement d'une zone de Golgi puisque son ultra-structure montre les mêmes éléments que ceux qui ont été décrits récemment dans la zone de Golgi de plusieurs types cellulaires ([2]).

On y observe en effet des vacuoles, des microvésicules et un système lamellaire de doubles membranes. Entre ces trois structures toutes les formes de passage peuvent se voir. Une étude attentive de la figure 1 permettra de suivre la formation de vacuoles ou de microvésicules par dilatation ou par fragmentation des fins canaux que constituent les doubles membranes. Tous ces éléments représentent donc divers aspects d'un même système cavitaire plus ou moins rétréci ou dilaté.

Dans les jeunes spermatides l'arrangement topographique des divers éléments de la zone de Golgi est caractéristique. Les structures lamellaires occupent généralement la portion corticale de la zone où elles se disposent en une sorte de capsule autour d'une portion médullaire. En certains points les doubles membranes s'empilent en masses denses et correspondent vraisemblablement aux dictyosomes classiques ([3]).

Dans la portion médullaire de la zone de Golgi les microvésicules prédominent et coiffent la surface de l'appareil acrosomique lorsque celui-ci est bien développé (*fig.* 1).

A la périphérie de la zone de Golgi on note la présence de larges vacuoles qui paraissent se former par gonflement des doubles membranes. On les

(*) Séance du 8 août 1955.

([1]) C. P. Leblond et Y. Clermont, *Amer. J. Anat.*, 90, 1952, p. 167-215.

([2]) A. J. Dalton et M. C. Felix, *Amer. J. Anat.*, 94, 1954, p. 171-208; F. S. Sjöstrand et V. Hanzon, *Exp. Cell. Res.*, 7, 1954, p. 415-429; F. Haguenau et W. Bernhard, *Arch. Anat. Micr. et Morph. Comp.*, 44, 1955, p. 27-55.

([3]) J. G. Gatenby et J. H. Woodger, *Quart. J. Micr. Sc.*, 65, 1920, p. 265-292.

retrouve dans le cytoplasme environnant même à distance de la zone de Golgi (*fig.* 1).

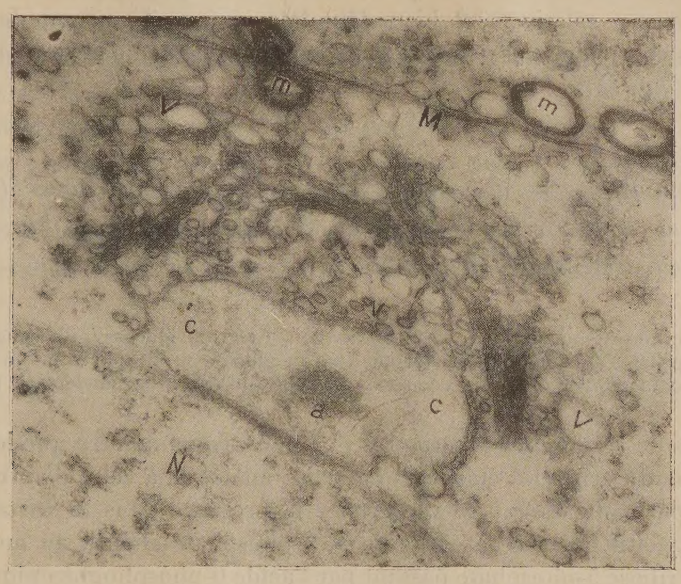


Fig. 1. — Jeune spermatide de Rat. Contre le noyau (N), le système acrosomique, à un stade où l'on voit nettement l'acrosome interne (*a*) et le futur capuchon céphalique (*c*). L'ensemble est coiffé d'une zone de Golgi typique qui comprend des microvésicules (*v*), des vacuoles (V) et des structures lamellaires « en écailles » disposées à la périphérie (dictyosomes). M, membrane cellulaire; *m*, mitochondries. Gross. 28.500.

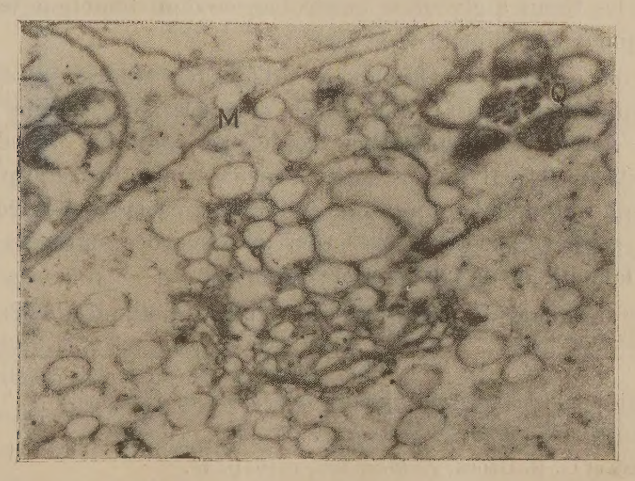


Fig. 2. — Lobe cytoplasmique résiduel d'une spermatide de Rat. A ce stade, la zone de Golgi a une structure presque uniquement vacuolaire. M, membrane cellulaire; Q, queue de spermatide entourée de mitochondries. Gross. 10.500.

Dans les spermatides plus évoluées, la zone de Golgi change d'aspect lorsqu'elle se détache du système acrosomique et qu'elle se déplace vers le lobe cytoplasmique résiduel. Tandis qu'au début de la spermiogénèse la zone de Golgi est dense, relativement bien délimitée et formée surtout de doubles membranes et de microvésicules, la zone de Golgi résiduelle devient nettement vacuolaire (*fig.* 2).

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *La présence d'un système oxydatif direct du glucose 6-phosphate dans le cristallin.* Note de MM. **Paul Mandel** et **Jean Klethi**, présentée par M. René Fabre.

Le cristallin est pourvu d'un système oxydatif direct du glucose 6-phosphate. Les déshydrogénases qui assurent la dégradation du glucose 6-phosphate et de l'acide 6-phosphogluconique ont pour coenzyme le triphosphopyridine nucléotide (TPN).

Au cours de recherches antérieures ([1]), nous avons montré que le système glycolytique du cristallin était en tout point analogue à celui d'autres tissus. Il nous a paru intéressant de rechercher la présence dans le cristallin d'un système oxydatif qui partant du glucose 6-phosphate aboutit au mélange de ribulose et ribose 5-phosphate passant par l'acide 6-phosphogluconique.

Les travaux récents ont attiré l'attention sur la place importante qu'occupe la dégradation oxydative directe du glucose 6-phosphate dans les tissus de mammifères ([2]), ([3]), ([4]), ([5]). La présence éventuelle de ce type de dégradation dans le cristallin serait d'autant plus importante à connaître que le cristallin se classe parmi les tissus à glycolyse anaérobie, ce dont témoigne le taux élevé d'acide lactique dans l'humeur aqueuse.

Nos essais ont porté sur des homogénats de parties antérieures de cristallins de veaux. Pour chaque essai, nous avons employé 20 cristallins qui ont été broyés dans 20 cm^3 d'eau bidistillée froide puis soumis à une dialyse sous pression constante. L'activité des déshydrogénases du glucose 6-phosphate et de l'acide 6-phosphogluconique a été déterminée en suivant la réduction du triphosphopyridine nucléotide (TPN) en présence des substrats correspondants, selon la méthode de Glock et McLean ([2]).

Le glucose 6-phosphate a été préparé selon la méthode de K. P. Dubois

---

([1]) P. Mandel et D. Izraelewicz, *Comptes rendus*, **238**, 1954, p. 404.

([2]) G. E. Glock et P. Mc Lean, *Biochem. J.*, **55**, 1953, p. 400.

([3]) F. Dickens et G. E. Glock, *Nature*, **166**, 1950, p. 33.

([4]) F. Dickens et G. E. Glock, *Biochem. J.*, **50**, 1951, p. 81.

([5]) B. L. Horecker et P. Z. Smyrniotis, *J. Biol. Chem.*, **193**, 1951, p. 371.

et V. R. Potter ([6]) légèrement modifiée. L'acide 6-phosphogluconique nous a été offert par le Professeur F. Dickens. Le milieu réactionnel était constitué comme suit :

— tampon phosphaté à 0,1 M de pH 7,1, 0,5 cm³;

— glucose 6-phosphate ou acide 6-phosphogluconique à concentration finale de 0,1 M, 0,5 cm³;

— coenzyme I ou coenzyme II : 0,4 mg par cm³, 0,5 cm³.

La préparation de TPN titrait 60 %, celle de diphosphopyridine nucléotide (DPN) 90 %. La réduction du TPN et du DPN a été suivie au spectrophotomètre. Les mesures ont été effectuées à 340 mμ.

Les résultats de nos essais sont résumés dans les graphiques I et II.

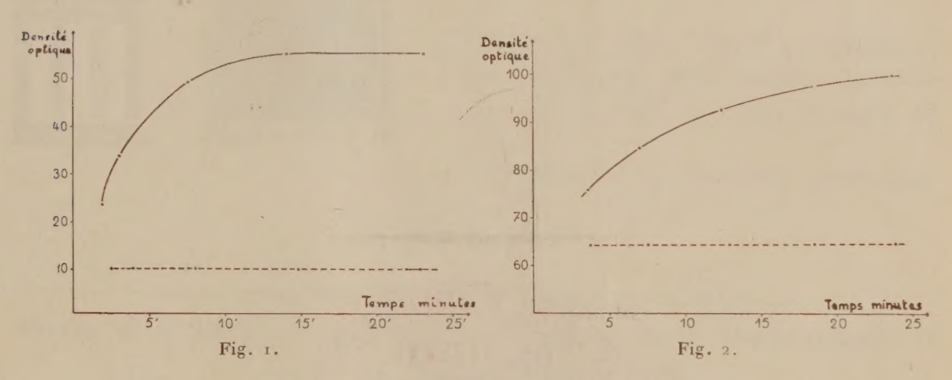


Fig. 1.   Fig. 2.

Fig. 1. — Oxydation du glucose 6-phosphate par un extrait de cristallin.
—— Activité de la glucose 6-phosphate déshydrogénase du cristallin suivie par la réduction du TPN.
---- En présence de DNP et en l'absence du TPN, on ne note pas d'action déshydrogénasique.
Mesures spectrophotométriques à 340 mμ.

Fig. 2. — Oxydation de l'acide 6-phosphogluconique par un extrait de cristallin.
—— Activité de la 6-phosphogluconate déshydrogénase du cristallin suivie par la réduction du TPN.
----- En présence de DNP et en l'absence du TPN, on ne note pas d'action déshydrogénasique.
Mesures spectrophotométriques à 340 mμ.

Il ressort de l'examen des graphiques que le cristallin contient des déshydrogénases qui assurent la dégradation du glucose 6-phosphate et de l'acide 6-phosphogluconique. La réaction nécessite la présence de TPN qui joue un rôle de coenzyme accepteur d'hydrogène comme dans le cas du système oxydatif direct d'autres tissus. L'action des déshydrogénases mises en évidence ne se manifeste pas en présence de DPN.

Nous avons également constaté que la dégradation du glucose 6-phosphate en présence de TPN aboutit à la formation de ribose. En appliquant la

([6]) *J. Biol. Chem.*, 147, 1943, p. 41.

technique de W. Mejbaum [7], nous avons mis en évidence la production dans le milieu réactionnel de 15 à 63 γ de ribose pour des durées de réaction de 5 à 20 mn. Les quantités optima étaient obtenues à pH 8,5.

La séance est levée à 15 h 40 m.

L. B.

[7] *Z. Physiol. Chem.*, 258, 1939, p. 117.

